第21講　約数と倍数

§1 約数と倍数

要点整理 と 公式

要点1 約数と倍数

整数
- 正の整数(自然数)　1, 2, 3, ……
- 0
- 負の整数　− 1, − 2, − 3, ……

2つの整数 a, b について，ある整数 k を用いて $a = bk$ と表されるとき，

a は b の「倍数」（a は b で割り切れる）

b は a の「約数」

という。

(ex) 6 = 2・3 より，

6 は 2 の「　　　」であり，2 は 6 の「　　　」である。

6 は 3 の「　　　」であり，3 は 6 の「　　　」である。

また，6 = (− 2)・(− 3) より，6 は − 2，− 3 の倍数であり，− 2，− 3 は 6 の約数である。

(ex) 10 = 1・　　= 2・　　より 10 の約数は ± 1，± 2，± 5，± 10 である。

1 と − 1 はすべての整数の約数となる。

また，0 はすべての数の倍数となる。

(ex) 3 の倍数は，　　，± 3，± 6，……

とくに，2 の倍数を「偶数」，2 の倍数でない数を「奇数」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点❷ 倍数の判定法

ある自然数が，どのような自然数の倍数かを判定する方法のうち，主なものは以下。

■ 倍数の判定法

2 の倍数 …「 一の位 」が 2 の倍数（0，2，4，6，8）

5 の倍数 …「 一の位 」が 5 の倍数（0，5）

4 の倍数 …「 下 2 桁 」が 4 の倍数

3 の倍数 …「 各位の数の和 」が 3 の倍数

9 の倍数 …「 各位の数の和 」が 9 の倍数

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］（1）24 の正の約数をすべて求めよ。

（2）15 の正の倍数を小さいものから 5 個求めよ。

［2］（1）3 桁の自然数 N について，百の位，十の位，一の位をそれぞれ a, b, c とするとき，$a+b+c$ が 3 の倍数ならば N は 3 の倍数になることを説明せよ。

（2）5 桁の自然数 2854□ が 3 の倍数かつ 5 の倍数であるとき，□ に入る数字を求めよ。

Point Pickup

○の倍数であることの証明

⟹　○×(整数)の形にする。

倍数の判定法

2 の倍数，5 の倍数　⟹　「一の位」が 2 の倍数，5 の倍数

3 の倍数，9 の倍数　⟹　「各位の数の和」が 3 の倍数，9 の倍数

4 の倍数　⟹　「下 2 桁」が 4 の倍数

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 素因数分解と約数

要点整理 と 公式

要点3 素数と素因数分解

「素数」… 1 とその数自身以外に正の約数がない自然数。つまり正の約数が 2 個のみの数。

（ex）2，3，5，7，11，13，……

「合成数」… 2 以上の自然数で，素数ではない数。

（ex）4，6，8，9，10，12，……

※ 1 は素数でも合成数でもない。

「因数」… ある整数がいくつかの整数の「積」で表されるとき，積をつくる 1 つ 1 つの数。

「素因数」… 因数のうち，素数のもの。

ある自然数を素数だけの積で表すことを「素因数分解」するという。

（ex）$12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$

※合成数は必ず素因数分解できる。その結果は，積の順序を考えなければただ 1 通りである。

要点4 約数と素因数分解

$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$　より　12 の正の約数は 1，2，3，4，6，12 の 6 個である。

この約数の個数を，素因数分解を用いて求めることができる。

12 を素因数分解すると　$12 = 2^2 \cdot 3$ となる。

よって，12 の正の約数は，素因数 2 を最大で 2 個，素因数 3 を最大で 1 個もつ数である。

例えば，約数 6 は　$2^1 \cdot 3^1$，約数 3 は $2^0 \cdot 3^1$　である。　（$a^0 = 1$　と考える）

つまり，12 の約数は

2 を 0，1，2 回，　　3 を 0，1 回

かけることで得られ，その個数は「積の法則」（数学 A）により　$3 \times 2 = 6$（個）である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

このことより，次のことがいえる。

■正の約数の個数

自然数 N が $N = p^a q^b r^c \cdots\cdots$ と素因数分解されるとき

N の正の約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

(1) $\sqrt{1400n}$ が自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) 150 の正の約数の個数を求めよ。また，150 の正の約数の総和を求めよ。

Point Pickup

正の約数の個数

自然数が $p^a q^b r^c$ …… のように素因数分解されるとき

その約数の個数は　$(a+1)(b+1)(c+1)$ ……

正の約数の総和

自然数が $p^a q^b r^c$ …… のように素因数分解されるとき

その約数の総和は

$(1+p^1+p^2+\cdots\cdots+p^a)(1+q^1+q^2+\cdots\cdots+q^b)(1+r^1+r^2+\cdots\cdots+r^c)\cdots\cdots$

で計算できる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▸ 最大公約数と最小公倍数

要点整理 と 公式

要点5 最大公約数と最小公倍数

2つ以上の整数について

「最大公約数」… 共通する約数（公約数）のうち最大のもの

「最小公倍数」… 共通する倍数（公倍数）のうち正で最小のもの

要点6 最大公約数と最小公倍数の求め方

最大公約数・最小公倍数を求めるとき，素因数分解が利用できる。

24，36，90について，

$24 = 2^3 \cdot 3$　　$36 = 2^2 \cdot 3^2$　　$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$　と素因数分解される。

24，36，90の最大公約数については，素因数分解されたそれぞれの素因数のうち，

3つに共通で指数が最小のものを選んで，その積を求める。

$$
\begin{aligned}
24 &= 2^3 \cdot 3 \\
36 &= 2^2 \cdot 3^2 \\
90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
\hline
& 2 \cdot 3 = 6
\end{aligned}
$$

よって最大公約数は　6

（検算）

$$
\begin{array}{r|rrr}
2 & 24 & 36 & 90 \\ \hline
3 & 12 & 18 & 45 \\ \hline
 & 4 & 6 & 15
\end{array}
$$

24，36，90の最小公倍数については，素因数分解されたそれぞれの素因数のうち，

指数が最大のものを選んで，その積を求める。

$$
\begin{aligned}
24 &= 2^3 \cdot 3 \\
36 &= 2^2 \cdot 3^2 \\
90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
\hline
& 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360
\end{aligned}
$$

よって最小公倍数は 360

（検算）

$$
\begin{array}{r|rrr}
2 & 24 & 36 & 90 \\ \hline
2 & 12 & 18 & 45 \\ \hline
3 & 6 & 9 & 45 \\ \hline
3 & 2 & 3 & 15 \\ \hline
 & 2 & 1 & 5
\end{array}
$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点 7 互いに素

2 つの整数 a, b について，共通な素因数がないとき，a と b は「互いに素」であるという。

このとき，2 つの整数 a, b の最大公約数は「　　」である。

（ex）2 数 9 と 10 について，$9 = 3^2$，$10 = 2 \cdot 5$　より，9 と 10 は互いに素「　　　　」

※互いに素な 2 つの整数について，以下のことがいえる。

k を整数とする。a, b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

（ex）k を整数とし，$2k$ が 3 の倍数のとき，

2 と 3 は互いに素より，k は 3 の倍数である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　3つの整数 28，70，154 の最大公約数および最小公倍数を求めよ。

(2)　a は自然数とする。$a+2$ は 3 の倍数であり，$a+4$ は 4 の倍数であるとき，

$a+8$ は 12 の倍数であることを証明せよ。

Point Pickup

最大公約数・最小公倍数

素因数分解が有効。それぞれの数の素因数について

最大公約数　⟹　共通な素因数のうち，指数が最小のもの

最小公倍数　⟹　素因数のうち，指数が最大のもの

を選んで，その積を求める。

互いに素である整数の性質

a，b，k を整数とするとき，a，b が互いに素ならば

・ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

・a の倍数かつ b の倍数である整数は，ab の倍数である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 余りによる分類

要点整理 と 公式

要点 8 除法の原理

整数の割り算において，次のことが成り立つ。

■ 除法の原理

整数 a を，正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると

$a = bq + r,\ 0 \leqq r < b$

となる整数 q，r がただ１通りに決まる。

$r = 0$ のとき，a は b で「割り切れる」といい，$r \neq 0$ のときは a は b で割り切れない。

（ex）36 を 7 で割ると，商が 5 で余りが 1

よって 36 ＝　　　　　　と表される。

要点 9 余りによる整数の分類

整数を 2 で割ったときの余りは 0，1 のいずれかである。

よって，すべての整数は k を整数として $2k$，$2k+1$ の「　　」通りの形で表される。

$2k$ は偶数，$2k+1$ は奇数である。

同様に，整数を 3 で割ったときの余りは 0，1，2 のいずれかである。

よって，すべての整数は k を整数として $3k$, $3k+1$, $3k+2$ の「　　」通りの形で表される。

一般に，すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余りによって

mk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$（k は整数）

の「　　」通りで表される。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

n を整数とする。次のことを証明せよ。

n^2+1 は 3 で割り切れない。

Point Pickup

余りによる整数の分類

k を整数とするとき，すべての整数は

2 で割ったときの余りで　$2k$，$2k+1$　の 2 通りに

3 で割ったときの余りで　$3k$，$3k+1$，$3k+2$　の 3 通りに

それぞれ分類できる。

整数に関する証明，とくに倍数や余りに関する問題に有効。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　確認テスト

1　6 桁の整数 4659 □ 4 が 9 の倍数となるのは □ = [ア] のときである。

2　$\sqrt{72n}$ が自然数となる最小の自然数 n は n = [イ] である。

また，72 の正の約数の個数は [ウエ] である。

3　3 つの整数 60，84，90 の最大公約数は [オ]，最小公倍数は [カキクケ] である。

4　すべての整数は，2 で割った余りによって [コ] 通りに，3 で割った余りで [サ] 通りに分類できる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　約数と倍数

1

［1］（1）$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ より　1，2，3，4，6，8，12，24

（2）15，30，45，60，75

［2］（1）$N = 100a + 10b + c$

$= 99a + 9b + a + b + c$

$= 3(33a + 3b) + a + b + c$

$3(33a + 3b)$ は 3 の倍数より，$a + b + c$ が 3 の倍数ならば N は 3 の倍数になる。

（2）2854□ が 5 の倍数となるのは □ $= 0$，5 のとき。

□ $= 0$ のとき，$2 + 8 + 5 + 4 +$ □ $= 19 + 0 = 19$　これは 3 の倍数ではない。

□ $= 5$ のとき，$2 + 8 + 5 + 4 +$ □ $= 19 + 5 = 24$　これは 3 の倍数である。

よって，求める数は 5

2

（1）$1400n$ がある自然数の 2 乗になればよい。

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

よって，求める自然数 n は　$n = 2 \cdot 7 = 14$

（2）$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

よって，150 の正の約数の個数は　$2 \times 2 \times 3 = 12$（個）

150 の正の約数の総和は

$(1 + 2^1)(1 + 3^1)(1 + 5^1 + 5^2) = 3 \cdot 4 \cdot 31 = 372$

3

（1）$28 = 2^2 \cdot 7$，$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$，$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$

よって，最大公約数は $2 \cdot 7 = 14$

最小公倍数は $2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1540$

（2）$a + 2$，$a + 4$ は自然数 k，l を用いて

$a + 2 = 3k$，$a + 4 = 4l$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

と表される。このとき

$a+8=(a+2)+6=3k+6=3(k+2)$

$a+8=(a+4)+4=4l+4=4(l+1)$

よって，$3(k+2)=4(l+1)$

$3(k+2)$は3の倍数であり，3と4は互いに素より，$k+2$は4の倍数

よって，自然数mを用いて$k+2=4m$　と表される。

したがって，$a+8=3(k+2)=3\cdot 4m=12m$　より

$a+8$は12の倍数である。

4

すべての整数は3で割った余りによって

$3k$，$3k+1$，$3k+2$　(kは整数)

のいずれかの形で表される。

$n=3k$のとき

$n^2+1=(3k)^2+1=9k^2+1=3\cdot 3k^2+1$

$n=3k+1$のとき

$n^2+1=(3k+1)^2+1=9k^2+6k+2=3(3k^2+2k)+2$

$n=3k+2$のとき

$n^2+1=(3k+2)^2+1=9k^2+12k+5=3(3k^2+4k+1)+2$

よって，n^2+1を3で割ったときの余りは1か2である。

したがって，n^2+1は3で割り切れない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　確認テスト

1 6桁の整数 4659□4 が 9 の倍数となるのは □ = ［ア］ のときである。

2 $\sqrt{72n}$ が自然数となる最小の自然数 n は n = ［イ］ である。

また，72 の正の約数の個数は ［ウエ］ である。

3 3つの整数 60，84，90 の最大公約数は ［オ］，最小公倍数は ［カキクケ］ である。

4 すべての整数は，2 で割った余りによって ［コ］ 通りに，3 で割った余りで ［サ］ 通りに分類できる。

{ 解答 }

1 ア　8

2 イ　2　　ウ　1　　エ　2

3 オ　6　　カ　1　　キ　2　　ク　6　　ケ　0

4 コ　2　　サ　3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。